数理解析研究所講究録
第2073巻 2018年 63-71

On the n-th generalized operator valued divergences

伊佐 浩史 (Hiroshi ISA)(1), 伊藤 公智 (Masatoshi ITO)(2)
亀井 栄三郎 (Eizaburo KAMEI)(3), 遠山 宏明 (Hiroaki TOHYAMA)(4),
渡邉 雅之 (Masayuki WATANABE)(5)
(1), (2), (4), (5): 前橋工科大学 (Maebashi Institute of Technology)

1. Introduction.

本報告を通して, A, B はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の strictly positive linear operator とする.

Fujii と Kamei は A, B に関する relative operator entropy を次のように定義した [1]:

$$S(A|B) \equiv A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}.$$

Furuta[6] は $S(A|B)$ を拡張して, 次のように generalized relative operator entropy (cf. [5]) を与えた:

$$S_t(A|B) \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ここで, $t=0$ の場合は $S(A|B)$ となる. また, Yanagi, Kuriyama, Furuichi[17] は, Tsallis relative operator entropy を次のように定義した:

$$T_\alpha(A|B) \equiv \frac{A \sharp_\alpha B - A}{\alpha}, \quad \alpha \in (0,1].$$

ここで, $A \sharp_\alpha B \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^\alpha A^{\frac{1}{2}}$ は weighted geometric operator mean (cf. [15]) である. また, $T_0(A|B) \equiv \lim_{\alpha\to 0} T_\alpha(A|B) = S(A|B)$ となることに注意する. $S(A|B)$, $S_\alpha(A|B)$, $T_\alpha(A|B)$ について, 次に示す不等式が成立する [8]:

$$(*) \qquad S(A|B) \le T_\alpha(A|B) \le S_\alpha(A|B) \le -T_{1-\alpha}(B|A) \le S_1(A|B), \quad \alpha \in (0,1).$$

$A \sharp_\alpha B$ を拡張して, path $A \natural_t B$ を次のように定義する ([2, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 14, etc.]):

$$A \natural_t B \equiv A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^t A^{\frac{1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$A = A \natural_0 B$, $B = A \natural_1 B$ であり, $t \in [0,1]$ の場合は, $A \natural_t B$ は $A \sharp_t B$ に一致する. われわれは, $A \natural_t B$ を用いて Tsallis relative operator entropy を次のように再定義した:

$$T_t(A|B) \equiv \frac{A \natural_t B - A}{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Petz は [16] において, Bregman type の operator divergence

$$D_{FK}(A|B) \equiv B - A - S(A|B)$$

を導入した. われわれは $D_{FK}(A|B)$ を Petz-Bregman divergence と呼んでいる [11, 12]. ここで, $D_{FK}(A|B)$ は 2 つの relative operator entropy $T_1(A|B)$, $S(A|B)$ の差で表すことができる. さらに [12] においては, $(*)$ に現れる 2 つの項の差

$$\Delta_1 \equiv T_\alpha(A|B) - S(A|B),$$
$$\Delta_2 \equiv S_\alpha(A|B) - T_\alpha(A|B)$$

等々を operator divergence とみなして，これらについての考察を行った.

本報告では，$A \natural_t B$ を $\Psi_{A,B}(t)$ と表し，これを operator valued function として扱う．このとき，$\Psi'_{A,B}(t) = S_t(A|B)$ である [6, 8, 11, 13]. Section 2 では，この関数を基に 2 変数関数 $\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$ を定義する．このとき，不等式 (*) は $\Psi^{[1]}_{A,B}(x,y)$ を用いて

$$(**)\quad \Psi^{[1]}_{A,B}(0,0) \le \Psi^{[1]}_{A,B}(\alpha,0) \le \Psi^{[1]}_{A,B}(\alpha,\alpha) \le \Psi^{[1]}_{A,B}(1,\alpha) \le \Psi^{[1]}_{A,B}(1,1),\quad \alpha \in (0,1)$$

と書き直すことができる．さらに，$A \le B$ の場合には，$\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$ について同様の不等式

$$(***)\quad \Psi^{[n]}_{A,B}(0,0) \le \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,0) \le \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,\alpha) \le \Psi^{[n]}_{A,B}(1,\alpha) \le \Psi^{[n]}_{A,B}(1,1),\ \alpha \in (0,1)$$

が成立することを示す．また，operator divergence $D_{FK}(A|B), \Delta_1, \Delta_2$ は $\Psi^{[1]}_{A,B}(x,y)$ を用いて

$$\begin{aligned} D_{FK}(A|B) &= \Psi^{[1]}_{A,B}(1,0) - \Psi^{[1]}_{A,B}(0,0), \\ \Delta_1 &= \Psi^{[1]}_{A,B}(\alpha,0) - \Psi^{[1]}_{A,B}(0,0), \\ \Delta_2 &= \Psi^{[1]}_{A,B}(\alpha,\alpha) - \Psi^{[1]}_{A,B}(0,\alpha) \end{aligned}$$

と表すことができる．Section 3 では，これらを一括して含む operator divergence の族

$$D^{[1]}_{A,B}(x,y) \equiv \Psi^{[1]}_{A,B}(x,y) - \Psi^{[1]}_{A,B}(y,y)$$

を考え，さらに，これらを n 次に深化させた

$$D^{[n]}_{A,B}(x,y) \equiv \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) - \Psi^{[n]}_{A,B}(y,y)$$

を導入し，その具体的な形を提示する．また，$D^{[n]}_{A,B}(x,y)$ を用いて $D_{FK}(A|B), \Delta_1, \Delta_2$ の n-th operator divergence $D^{[n]}_{FK}(A|B)$, $\Delta^{[n]}_1(\alpha)$, $\Delta^{[n]}_2(\alpha)$ を与える．

2. Operator valued function $\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$.

$\Psi_{A,B}(t) \equiv A \natural_t B$ $(t \in \mathbb{R})$ とする．$\Psi_{A,B}(t)$ の n 次導関数について，次が成立する．

Lemma 1. *For $n \in \mathbb{N}$,*

$$\Psi^{(n)}_{A,B}(t)\Big(= \frac{d^n}{dt^n}\Psi_{A,B}(t)\Big) = (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))^n.$$

Proof. $X = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ とおく．定数 $a > 0$ に対して $\dfrac{d^n}{dt^n}a^t = a^t(\log a)^n$ であることより

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}_{A,B}(t) &= A^{\frac{1}{2}}X^t(\log X)^n A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}}X^tA^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log X)A^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log X)A^{\frac{1}{2}}\cdots A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log X)A^{\frac{1}{2}} \\ &= (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))(A^{-1}S(A|B))\cdots(A^{-1}S(A|B)) \\ &= (A \natural_t B)(A^{-1}S(A|B))^n \end{aligned}$$

である． □

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，operator valued function $\Psi^{[n]}_{A,B} : \mathbb{R}^2 \to B(\mathcal{H})$ を次のように帰納的に定義する．

Definition 2.

$$\Psi^{[1]}_{A,B}(x,y) \equiv \frac{\Psi_{A,B}(x)-\Psi_{A,B}(y)}{x-y} \quad (x \neq y), \quad \Psi^{[1]}_{A,B}(y,y) \equiv \lim_{x\to y} \Psi^{[1]}_{A,B}(x,y).$$

For $n \geq 2$,

$$\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) \equiv \frac{\Psi^{[n-1]}_{A,B}(x,y)-\Psi^{[n-1]}_{A,B}(y,y)}{x-y} \quad (x \neq y), \quad \Psi^{[n]}_{A,B}(y,y) \equiv \lim_{x\to y} \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y).$$

$A \natural_t A = A$ より, $A = B$ のときは $\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) = O$ である. また, 定義より

$$\begin{aligned} T_x(A|B) &= \frac{A \natural_x B - A}{x} = \Psi^{[1]}_{A,B}(x,0), \\ S_y(A|B) &= (A \natural_y B)A^{-1}S(A|B) = \Psi^{[1]}_{A,B}(y,y), \\ S(A|B) &= \Psi^{[1]}_{A,B}(0,0). \end{aligned}$$

である. したがって, $\Psi^{[1]}_{A,B}(x,y)$ を用いて不等式 $(*)$ は次のように書き直すことができる.

$$(**) \quad \Psi^{[1]}_{A,B}(0,0) \leq \Psi^{[1]}_{A,B}(\alpha,0) \leq \Psi^{[1]}_{A,B}(\alpha,\alpha) \leq \Psi^{[1]}_{A,B}(1,\alpha) \leq \Psi^{[1]}_{A,B}(1,1), \quad \alpha \in (0,1).$$

この不等式の, $\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$ $(n \in \mathbb{N})$ への拡張について考察する.

まず, $\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$ の性質を調べるために次の関数を考える:

$$\phi_{a,n}(h) \equiv \frac{a^h - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!}(\log a)^k}{h^n}, \quad h \neq 0.$$

ただし, $a(\neq 1)$ は正の実数, n は自然数とする. Taylor の定理より次がいえる.

Lemma 3. *There exists a real number θ with $0 < \theta < 1$ such that*

$$\phi_{a,n}(h) = \frac{a^{\theta h}}{n!}(\log a)^n.$$

In particular,

(1) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \phi_{a,n}(h) = \frac{(\log a)^n}{n!}$,

(2) $\phi_{a,n}(h) > 0$ *if* $a > 1$ *or* n *is even,*

(3) $\phi_{a,n}(h) < 0$ *if* $a < 1$ *and* n *is odd.*

$\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$ は次のように表すことができる.

Theorem 4. *Let $n \in \mathbb{N}$ and assume $A \neq B$. Then*

$$(\star) \quad \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-y)^n}\left(A \natural_x B - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-y)^k}{k!}(A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^k\right) & \text{if } x \neq y, \\ \dfrac{1}{n!}(A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^n & \text{if } x = y. \end{cases}$$

Proof. nに関する帰納法により証明する.
$x \neq y$のときは

$$\Psi^{[1]}_{A,B}(x,y) = \frac{\Psi_{A,B}(x) - \Psi_{A,B}(y)}{x-y} = \frac{A \natural_x B - A \natural_y B}{x-y}$$

であり, したがって

$$\begin{aligned}\Psi^{[1]}_{A,B}(y,y) = \lim_{x\to y}\Psi^{[1]}_{A,B}(x,y) &= \lim_{x\to y}\frac{A \natural_x B - A \natural_y B}{x-y} \\ = S_y(A|B) &= (A \natural_y B)A^{-1}S(A|B)\end{aligned}$$

となるため, $n=1$のとき$(\star)$は成立している.
$n \geq 2$として

$$\begin{aligned}\Psi^{[n-1]}_{A,B}(x,y) &= \frac{A \natural_x B - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(x-y)^k}{k!}(A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^k}{(x-y)^{n-1}}, \\ \Psi^{[n-1]}_{A,B}(y,y) &= \frac{1}{(n-1)!}(A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^{n-1}\end{aligned}$$

が成立していると仮定する. $x \neq y$のとき

$$\begin{aligned}\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) &= \frac{1}{x-y}\left(\Psi^{[n-1]}_{A,B}(x,y) - \Psi^{[n-1]}_{A,B}(y,y)\right) \\ &= \frac{1}{(x-y)^n}\left(A \natural_x B - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-y)^k}{k!}(A \natural_y \dot{B})(A^{-1}S(A|B))^k\right)\end{aligned}$$

であり, したがって

$$\begin{aligned}&\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) \\ &= A^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-y)^k}{k!}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^y(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^k}{(x-y)^n}\right)A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^y\left(\frac{(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{x-y} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-y)^k}{k!}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^k}{(x-y)^n}\right)A^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

である. $a>0$に対して

$$\psi^n_{x,y}(a) = \begin{cases} a^y\phi_{a,n}(x-y) & \textit{if} \;\; a \neq 1, \\ 0 & \textit{if} \;\; a = 1\end{cases}$$

とすると

$$\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) = A^{\frac{1}{2}}\psi^n_{x,y}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}}$$

であり, Lemma 3 より

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to y}\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) &= A^{\frac{1}{2}}\lim_{x\to y}\psi^{n}_{x,y}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\
&= A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{y}\frac{(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{n}}{n!}A^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{n!}A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{y}A^{\frac{1}{2}}A^{-1}A^{\frac{1}{2}}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{n}A^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{n!}(A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^{n}
\end{aligned}
$$

である. したがって, n についても $(\star)$ が成立している. □

$\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$ は次に示す性質を持つ.

Proposition 5. *Let $n\in\mathbb{N}$ and $x,y\in\mathbb{R}$ with $x\neq y$. If $A\neq B$, then $\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)\neq O$.*

Proof. Theorem 4 の証明と同じく, $a>0$ に対して

$$
\psi^{n}_{x,y}(a)=\begin{cases} a^{y}\phi_{a,n}(x-y) & \text{if } a\neq 1, \\ 0 & \text{if } a=1 \end{cases}
$$

とする. Lemma 3 より, $0<\theta<1$ となる実数 θ が存在して

$$
\psi^{n}_{x,y}(a)=\frac{a^{y+\theta(x-y)}}{n!}(\log a)^{n}
$$

であることより

$$
\begin{aligned}
\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) &= A^{\frac{1}{2}}\psi^{n}_{x,y}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{n!}A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{y+\theta(x-y)}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{n}A^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

である. $A\neq B$ とすると, $\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\neq O$ である. $\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ は self-adjoint であるから, $(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{n}\neq O$ であり,

$$
\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)=A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{y+\theta(x-y)}(\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{n}A^{\frac{1}{2}}\neq O
$$

を得る. □

$\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$ についての基本的な関係として, 次の不等式が成立する.

Theorem 6. *Let $n\in\mathbb{N}$ and $x,y\in\mathbb{R}$ with $x>y$. Then*

(1) $\Psi^{[n]}_{A,B}(y,y)\leq\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)\leq\Psi^{[n]}_{A,B}(x,x)$ *if n is odd,*

(2) $\Psi^{[n]}_{A,B}(y,y)\leq\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)\leq\Psi^{[n]}_{A,B}(x,x)$ *if n is even and $A\leq B$,*

$\Psi^{[n]}_{A,B}(y,y)\geq\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)\geq\Psi^{[n]}_{A,B}(x,x)$ *if n is even and $A\geq B$.*

Proof. まず, $\Psi^{[n]}_{A,B}(y,y)$ と $\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$ の関係について調べる. 定義より

$$\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) - \Psi^{[n]}_{A,B}(y,y) = (x-y)\Psi^{[n+1]}_{A,B}(x,y)$$

である. $\psi^n_{x,y}(a)$ を Theorem 4 の証明と同じく

$$\psi^n_{x,y}(a) = \begin{cases} a^y\phi_{a,n}(x-y) & \textit{if } \ a \neq 1, \\ 0 & \textit{if } \ a = 1 \end{cases}$$

とする. Lemma 3 の (2),(3) より

$$\psi^{n+1}_{x,y}(a) \begin{cases} \geq 0 & \textit{if } n \textit{ is odd or } a \geq 1, \\ \leq 0 & \textit{if } n \textit{ is even and } a \leq 1 \end{cases}$$

であるから

$$\Psi^{[n+1]}_{A,B}(x,y) \begin{cases} \geq 0 & \textit{if } n \textit{ is odd or } A \leq B, \\ \leq 0 & \textit{if } n \textit{ is even and } A \geq B \end{cases}$$

である. したがって

$$\begin{aligned} \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) &\geq \Psi^{[n]}_{A,B}(y,y) \quad \textit{if } n \textit{ is odd or } A \leq B, \\ \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) &\leq \Psi^{[n]}_{A,B}(y,y) \quad \textit{if } n \textit{ is even and } A \geq B \end{aligned}$$

である.

次に, $\Psi^{[n]}_{A,B}(x,y)$ と $\Psi^{[n]}_{A,B}(x,x)$ の関係を調べる. $X = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ とおくと

$$\begin{aligned} &\Psi^{[n]}_{A,B}(x,x) - \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) \\ &= \frac{(A \natural_x B)}{n!}(A^{-1}S(A|B))^n - \frac{1}{(x-y)^n}\left(A \natural_x B - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-y)^k}{k!}(A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^k\right) \\ &= A^{\frac{1}{2}}\left(\frac{X^x}{n!}(\log X)^n - \frac{1}{(x-y)^n}\left(X^x - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-y)^k}{k!}X^y(\log X)^k\right)\right)A^{\frac{1}{2}} \\ &= A^{\frac{1}{2}}X^y\left(\frac{X^{x-y}}{n!}(\log X)^n - \frac{1}{(x-y)^n}\left(X^{x-y} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-y)^k}{k!}(\log X)^k\right)\right)A^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である. ここで, $a > 0$ に対して, Lemma 3 を用いると

$$\begin{aligned} &\frac{a^{x-y}}{n!}(\log a)^n - \frac{1}{(x-y)^n}\left(a^{x-y} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-y)^k}{k!}(\log a)^k\right) \\ &= \frac{a^{x-y}}{n!}(\log a)^n - \phi_{a,n}(x-y) \\ &= \frac{1}{n!}(a^{x-y} - a^{\theta(x-y)})(\log a)^n \quad (\exists\, \theta \in (0,1)) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \geq 0 & \textit{if } n \textit{ is odd or } a \geq 1, \\ \leq 0 & \textit{if } n \textit{ is even and } a \leq 1 \end{cases}$$

であり, したがって

$$\Psi^{[n]}_{A,B}(x,x) \geq \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) \quad \textit{if } n \textit{ is odd or } \ A \leq B,$$
$$\Psi^{[n]}_{A,B}(x,x) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) \quad \textit{if } n \textit{ is even and } \ A \geq B$$

である.

以上より, n が奇数の場合は

$$\Psi^{[n]}_{A,B}(y,y) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(x,x)$$

が成立し, n が偶数の場合には

$$\Psi^{[n]}_{A,B}(y,y) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(x,x) \quad \textit{if } \ A \leq B,$$
$$\Psi^{[n]}_{A,B}(y,y) \geq \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) \geq \Psi^{[n]}_{A,B}(x,x) \quad \textit{if } \ A \geq B$$

が成立している. □

Corollary 7. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0,1)$.*

(1) *If n is odd,*

$$\Psi^{[n]}_{A,B}(0,0) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,0) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,\alpha) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(1,\alpha) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(1,1).$$

(2) *If n is even and $A \leq B$,*

$$\Psi^{[n]}_{A,B}(0,0) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,0) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,\alpha) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(1,\alpha) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(1,1).$$

If n is even and $A \geq B$,

$$\Psi^{[n]}_{A,B}(0,0) \geq \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,0) \geq \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,\alpha) \geq \Psi^{[n]}_{A,B}(1,\alpha) \geq \Psi^{[n]}_{A,B}(1,1).$$

この結果は, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, (**) に対応する関係を与えている. 特に, $A \leq B$ の場合については

$$(***) \qquad \Psi^{[n]}_{A,B}(0,0) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,0) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(\alpha,\alpha) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(1,\alpha) \leq \Psi^{[n]}_{A,B}(1,1), \quad \alpha \in (0,1)$$

が成立する.

3. A generalization of the n-th Petz-Bregman divergence.

Section 2 より, $D_{FK}(A|B)$, Δ_1, Δ_2 は, $\Psi^{[1]}_{A,B}(x,y)$ を使って次のように表すことができる:

$$\begin{aligned} D_{FK}(A|B) = T_1(A|B) - S(A|B) &= \Psi^{[1]}_{A,B}(1,0) - \Psi^{[1]}_{A,B}(0,0), \\ \Delta_1 = T_\alpha(A|B) - S(A|B) &= \Psi^{[1]}_{A,B}(\alpha,0) - \Psi^{[1]}_{A,B}(0,0), \\ \Delta_2 = S_\alpha(A|B) - T_\alpha(A|B) &= \Psi^{[1]}_{A,B}(\alpha,\alpha) - \Psi^{[1]}_{A,B}(0,\alpha). \end{aligned}$$

これらのことより, より一般に $\Psi^{[1]}_{A,B}(x,y)$ と $\Psi^{[1]}_{A,B}(y,y)$ の差を, (x,y) をパラメーターとした A と B についての operator divergence と見なす. さらに, これらを n 次に深化させたものを次で定義する.

Definition 8. *For $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$D^{[n]}_{A,B}(x,y) \equiv \Psi^{[n]}_{A,B}(x,y) - \Psi^{[n]}_{A,B}(y,y).$$

定義より $D^{[n]}_{A,B}(x,y) = (x-y)\Psi^{[n+1]}_{A,B}(x,y)$ であるため, Proposition 5 から次のことがいえる.

Proposition 9. *Let $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$ with $x \neq y$. Then $D^{[n]}_{A,B}(x,y) = O$ implies $A = B$.*

このことに基づいて, $D^{[n]}_{A,B}(x,y)$ は operator divergence と見なせる. 特に $D^{[n]}_{A,B}(1,0) = \Psi^{[n]}_{A,B}(1,0) - \Psi^{[n]}_{A,B}(0,0)$ を n-th Petz-Bregman divergence と呼び, $D^{[n]}_{A,B}(x,y)$ を generalized n-th Petz-Bregman divergence と呼ぶことにする. $D^{[n]}_{A,B}(x,y)$ は具体的には次のように表される.

Theorem 10. *For $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$D^{[n]}_{A,B}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-y)^n}\left(A \natural_x B - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!}(A \natural_y B)(A^{-1}S(A|B))^k\right) & \text{if } x \neq y, \\ O & \text{if } x = y. \end{cases}$$

generalized n-th Petz-Bregman divergence $D^{[n]}_{A,B}(x,y)$ を用いて, $D^{[n]}_{FK}(A|B)$, $\Delta^{[n]}_1(\alpha)$, $\Delta^{[n]}_2(\alpha)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} D^{[n]}_{FK}(A|B) &\equiv D^{[n]}_{A,B}(1,0), \\ \Delta^{[n]}_1(\alpha) &\equiv D^{[n]}_{A,B}(\alpha,0), \qquad 0<\alpha<1, \\ \Delta^{[n]}_2(\alpha) &\equiv -D^{[n]}_{A,B}(0,\alpha), \quad 0<\alpha<1. \end{aligned}$$

特に, $D^{[1]}_{FK}(A|B) = D^{[1]}_{A,B}(1,0) = D_{FK}(A|B)$, $\Delta^{[1]}_1(\alpha) = D^{[1]}_{A,B}(\alpha,0) = \Delta_1$, $\Delta^{[1]}_2(\alpha) = -D^{[1]}_{A,B}(0,\alpha) = \Delta_2$ である. Theorem 10 より, $D^{[n]}_{FK}(A|B)$, $\Delta^{[n]}_1(\alpha)$, $\Delta^{[n]}_2(\alpha)$ の具体的な表現を得る.

Corollary 11. *For $n \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in (0,1)$,*

$$\text{(1)} \qquad D^{[n]}_{FK}(A|B) = B - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A(A^{-1}S(A|B))^k,$$

$$\text{(2)} \qquad \Delta^{[n]}_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha^n}\left(A \natural_\alpha B - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} A(A^{-1}S(A|B))^k\right),$$

$$\text{(3)} \qquad \Delta^{[n]}_2(\alpha) = -\frac{1}{(-\alpha)^n}\left(A - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\alpha)^k}{k!}(A \natural_\alpha B)(A^{-1}S(A|B))^k\right).$$

References

[1] J. I. Fujii and E. Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japon., **34**(1989), 341–348.

[2] J. I. Fujii and E. Kamei, Interpolational paths and their derivatives, Math. Japon., **39**(1994), 557–560.

[3] J. I. Fujii and E. Kamei, Path of Bregman-Petz operator divergence, Sci. Math. Jpn., **70**(2009), 329–333.

[4] M. Fujii, J. Mićić, J. Pečarić and Y. Seo, Recent Developments of Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb(2012).

[5] S. Furuichi, K. Yanagi, and K. Kuriyama, Fundamental properties of Tsallis relative entropy, J. Math. Phys., **45**(2004), 4868–4877.

[6] T. Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, Linear Algebra Appl., **381**(2004), 219–235.

[7] T. Furuta, J. Mićić, J. Pečarić and Y. Seo, Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities, Monographs in Inequalities 1, Element, Zagreb(2005).

[8] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Relative operator entropy, operator divergence and Shannon inequality, Sci. Math. Jpn., **75**(2012), 289–298.

[9] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Extensions of Tsallis relative operator entropy and operator valued distance, Sci. Math. Jpn., **76**(2013), 427–435.

[10] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, On relations between operator valued α-divergence and relative operator entropies, Sci. Math. Jpn., **78**(2015), 215–228. (online: e-2015 (2015), 215–228.)

[11] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Expanded relative operator entropies and operator valued α-divergence, J. Math. Syst. Sci., **5**(2015), 215–224.

[12] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Some operator divergences based on Petz-Bregman divergence, Sci. Math. Jpn., **80**(2017), 161–170.

[13] H. Isa, M. Ito, E. Kamei, H. Tohyama and M. Watanabe, Velocity and acceleration on the paths $A \natural_t B$ and $A \sharp_{t,r} B$, to appear in Sci. Math. Jpn.

[14] E. Kamei, Paths of operators parametrized by operator means, Math. Japon., **39**(1994), 395–400.

[15] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, Math Ann., **248**(1980), 205–224.

[16] D. Petz, Bregman divergence as relative operator entropy, Acta Math. Hungar., **116**(2007), 127–131.

[17] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, Linear Algebra Appl., **394**(2005), 109–118.